非可換束における「非對稱な結合律」の特性

芝　原　茂

非可換束（結合律と吸收律のみ滿足する二種の二項演算を持つ代數）が non trivial な可換部分束に完全に（互に素なものの和として表わされると言う意味で）分割出來るための必要十分な條件については，M. D. Gerhardts[1)2)] の研究がある。

一方，束の公理系の中，結合律を非對稱な結合律で置き換えても，束の公理系と等値な公理系を作り得ることが，W. Felscher[5)], M. J. Ruedin[4)] によつて示され，私自身[6)] も導いた。

さらに，非可換束において，交換律と非對稱な交換律（$((x\cdot y)\cdot x=(y\cdot x)\cdot y)$ とが同等であることを，M. D. Gerhardts[3)] は明らかにしたが，同時に彼は，結合律を非對稱な結合律によつて置き換えて作つた公理系を滿足する代數においても，同様に交換律と非對稱な交換律との同等性を證明した。

これらの研究を考慮すると，束のみならず，非可換束においても，結合律を非對稱な結合律で置き換て，元の代數と類似の性質を持つ代數を構成出來るようである。

この論文では，M. D. Gerhardts[2)] の成果において，結合律を非對稱な結合律で置き換えることが，どの様な結果を生むか，追跡した。二種の二項演算の中，片方についてだけ置き換えても，まつたく Gerhardts の成果を再現することが出來たが，兩方共置き換えると，同様の結果を期待出來ないようである。

§ 1

定義1：Mを空でない集合とし，$\wedge$と$\vee$とをMにおける二種の二項演算と

する。任意の三元 a, b, $c \in M$ に對して，次の六つの公理を滿すとき，$M_{\wedge\vee}$を Verband と言う。

$(A_s\wedge)$ $a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$ $(A_s\vee)$ $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$

$(B\wedge)$ $a\wedge(b\vee a)=a$ $(B\vee)$ $(a\wedge b)\vee a=a$

$(K\wedge)$ $a\wedge b=b\wedge a$ $(K\vee)$ $a\vee b=b\vee a$

この公理系から交換律 $(K\wedge)$, $(K\vee)$ を除けて，非可換な Verand を作る。

定義 2：$M_{\wedge\vee}$が任意の三元a, b, $c\in M$に對して $(A_s\wedge)$, $(A_s\vee)$, $(B\wedge)$, $(B\vee)$, $(C\wedge)$, $(C\vee)$を滿足する時，これを G-Schiefverband と呼ぶ。

$(C\wedge)$ $a\wedge(a\vee b)=a$ $(C\vee)$ $(b\wedge a)\vee a=a$

さらに結合律を非對稱な結合律で置き換えて，上のものとは異つた非可換束を定義しよう。

定義 3：$M_{\wedge\vee}$が任意の三元a, b, $c\in M$ に對して$(A_s\wedge)$, $(A_U\vee)$, $(B\wedge)$, $(B\vee)$, $(C\wedge)$, $(C\vee)$ を滿足するとき，これを $S_\vee$-Schiefverband と呼び，$(A_U\wedge)$, $(A_s\vee)$, $(B\wedge)$, $(B\vee)$, $(C\wedge)$, $(C\vee)$ を滿足するとき，これを $S_\wedge$-Schiefverband と呼ぶ。

$(A_U\wedge)$ $a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge(a\wedge c)$

$(A_U\vee)$ $(a\vee b)\vee c=(a\vee c)\vee(b\vee c)$

Verband と G-Schiefverband の公理系は，それぞれ$\wedge$と$\vee$の置換と同時に Element の順列を逆轉しても不變であるという意味で，自己双對である。又 $S_\vee$-Schiefverbandと$S_\wedge$-Schiefverband とは，その意味で互に双對である。G-Schiefverband (又は$S_\vee$-, $S_\wedge$-Schiefveband)が$(K\wedge)$と$(K\vee)$を滿せば，それを可換な G-Schiefverband (又は可換な$S_\vee$-, $S_\wedge$-Schiefverband) と呼ぼう。しかし實際に可換な G-, $S_\vee$-, $S_\wedge$-Schiefverband は互に等値な公理系を持つ代數となり，即ち Verband である。

(1.1) $S_\vee$-Schiefverband $M^{\wedge\vee}$ では，任意の二元a, $b\in M$に對して次の法則が成立つ。

$(G\wedge)$ $(a\wedge b)\wedge a=a\wedge b$ $(G\vee)$ $a\vee(b\vee a)=b\vee a$

(I∧) $a \wedge a = a$ (I∨) $a \vee a = a$

(P∧) $a \vee b = a$ ならば $b \wedge a = b$

(P∨) $a \wedge b = b$ ならば $b \vee a = a$

(R) $a \wedge b = a \Longleftrightarrow a \vee b = b$

定義4：$a < b \Longleftrightarrow a \wedge b = a$

によつて $S_\vee$-Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ の中に關係$<$を定める。

以下特別のことわりがなければ $M_{\wedge\vee}$は $S_\vee$-Schiefverband とする。

(1.2) $M_{\wedge\vee}$ の中に定義された關係$>$は，反射律と推移律を滿すという意味で，準順序關係である。

(1.3) 任意の二元 $a, b \in M$ に對し

$$a \wedge b < a$$
$$a \wedge b < b$$
$$a < a \vee b$$
$$b < a \vee b$$

が成立つ。

(1.4) 任意の四元 $a, b, c, d \in M$ に對し，次のことが成立つ。

$a < b$ かつ $c < d \Rightarrow a \wedge c < b \wedge d$ かつ $a \vee c < b \vee d$.

證明 $a \wedge c < a$ かつ $a < b$ より $a \wedge c < b$, $a \wedge c < c$ かつ $c < d$ より $a \wedge c < d$ だから，$(a \wedge c) \wedge (b \wedge d) = a \wedge c$ は直ちに得られる。一方 $a < b$ かつ $b < b \vee d$ より $a < b \vee d$, $c < d$ かつ $d < b \vee d$ より $c < b \vee d$ だから，$(a \vee c) \vee (b \vee d) = \{a \vee (b \vee d)\} \vee \{c \vee (b \vee d)\} = (b \vee d) \vee (b \vee d) = b \vee d$.

(1.5) $S_\vee$-Schiefverband において。次の三つの言明は等値である。

(1) $a \wedge b = b \vee a$

(2) $b \wedge a = a \vee b$

(3) $a < b$ かつ $b < a$.

證明 $b \wedge a = (b \wedge a) \wedge b = b \wedge (a \wedge b) = b \wedge (b \vee a) = b = (a \wedge b) \vee b = (b \vee a) \vee b = (b \vee b) \vee (a \vee b) = b \vee (a \vee b) = a \vee b$. 從つて(1)が成立てば $b \wedge a = b$ か

つ $a\vee b=b$ となり，(2)も(3)も成立つ。同様にして，等値性が證明される。

定義5：$a\approx b \Longleftrightarrow a\wedge b=b\vee a$とおいて，$M_{\wedge\vee}$ に關係 $\approx$ を定める。

(1.6) $M_{\wedge\vee}$ で定義された關係 $\approx$ は$M_{\wedge\vee}$ における Äquivalenzrelation であり，同時に Kongruenzrelation である。

證明 (1) $a\approx a$,

(2) $a\approx b$ かつ $b\approx c$ ならば $a\approx c$,

(3) $a\approx b$ ならば $b\approx a$,

(4) $a\approx b$ かつ $c\approx d$ ならば $a\vee c\approx b\vee d$ かつ $a\wedge c\approx b\wedge d$

定義6：$\Omega(a)=\{x\in M | a\wedge x=x\vee a\}$ を $M_{\wedge\vee}$ における modulo$\approx$ に關するaの同値類と名づけ，二つの同値類$\Omega(a)$と$\Omega(b)$に對して次の二種の二項演算を定める。

$$\Omega(a)\textcircled{\scriptsize$\wedge$}\Omega(b)=\Omega(a\wedge b)$$

$$\Omega(a)\textcircled{\scriptsize$\vee$}\Omega(b)=\Omega(a\vee b).$$

これによつて同値類の集合 M/Ω の上に代數が定義される。これを $M/\Omega_{\textcircled{\tiny$\wedge$}\textcircled{\tiny$\vee$}}$で表わす。又 $M/\Omega_{\textcircled{\tiny$\wedge$}\textcircled{\tiny$\vee$}}$ に屬する同値類を Ω-Klasse と言う。

(1.7) $M/\Omega_{\textcircled{\tiny$\wedge$}\textcircled{\tiny$\vee$}}$ は Verband である。

定義7：$M/\Omega_{\textcircled{\tiny$\wedge$}\textcircled{\tiny$\vee$}}$ を $S_{\vee}$-Schiefverband $M_{\vee\wedge}$ の begleitender Verband という。

定義8：Jordan-Witt[7] に從つて，$M_{\wedge\vee}$ がどの二元 $a, b\in M$ に對しても $a\wedge b=b\vee a$ を滿すとき，Nest という。

(1.8) Ω-Klasse は $M_{\wedge\vee}$ の Teil-$S_{\vee}$-Schiefverband であり，且つ Nest である。

證明 任意の二元 $a, b\in\Omega$ に對し，$a\approx b$ だから $a\vee b\approx a$ かつ $a\wedge b\approx a$ である。

定義9：Ω の濃度を $|\Omega|$ で表わす。

定義10：$M_{\wedge\vee}$ を $S_{\vee}$-Schiefverband とする。Mの空でない部分集合 I が次の條件を滿すとき，$M_{\wedge\vee}$ の Ideal と言う。

$a \in I,\ b \in M \Rightarrow a \wedge b,\ b \vee a \in I.$

(1.9) $S_\vee$-Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ のどの Ideal も，$M_{\wedge\vee}$ の Teil-$S_\vee$-Schiefverband である。

(1.10) $M_{\wedge\vee}$ の二つの Ideal の共通部分は空集合か又は Ideal である。

(1.11) Verband は只一つの Ideal (即ち自分自身) しか持たない。

定義11：I を$M_{\vee\wedge}$ の Ideal とする。任意の二元に對し，$a \wedge b = b \wedge a$ と $a \vee b = b \vee a$ が満されるとき，I を可換な Ideal 又は K-Ideal と呼ぶ。

(1.12) $S_\vee$-Schiefverband のどの二つの K-Ideal も互に素であるか，又は一致する。

(1.13) Ω を $S_\vee$-Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ における Ω-Klasse とし，I を K-Ideal とする。$e \in \Omega$ かつ $e \in I$ なる只一つの Element $e \in M$ が存在する。

(1.14) $S_\vee$-Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ の任意の K-Ideal は $M_{\wedge\vee}$ の可換な Teil-$S_\vee$-Schiefverband であり，$M_{\wedge\vee}$ の begleitender Verband $M/\Omega_{\otimes\otimes}$ に同型である。

§ 2

定義12：$S_\vee$-Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ において，任意の三元 $a, b, c \in M$ に對して，次の二つの條件が満されるとき，$M_{\wedge\vee}$ を T-$S_\vee$-Schiefverband と言う。

$$(T^\wedge)\quad (c \vee (a \vee b)) \wedge (b \vee a) = a \vee b$$

$$(T^\vee)\quad (a \wedge b) \vee ((b \wedge a) \wedge c) = b \wedge a.$$

(2.1) a, b を一つの T-$S_\vee$-Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ の同じΩ-Klasse の異る二元とすると，任意の元 $c \in M$ に對して，

$$a \wedge c \neq b \wedge c \qquad c \wedge a = c \wedge b$$

$$a \vee c = b \vee c \qquad c \vee a \neq c \vee b$$

が成立つ。

(2.2) T-$S_\vee$-Schiefverband において，任意の二つのΩ-Klasse は濃度が等しい。

(2.3) T-$S_\vee$-Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ では任意の a, $b \in M$ に對して，次の二つの等式が成立つ。

$$(E^\wedge)\quad (b\vee a)\wedge a=a \qquad\qquad (E^\vee)\quad a\vee(a\wedge b)=a$$

證明 $a=a\vee a=(b\vee(a\vee a))\wedge(a\vee a)=(b\vee a)\wedge a$

$a=a\wedge a=(a\wedge a)\vee((a\wedge a)\wedge b)=a\vee(a\wedge b)$

(2.4) T-$S_\vee$-Schiefverband において，$a\wedge b=b\wedge a$ と $a\vee b=b\vee a$ とは等値である。

證明 $a\wedge b=b\wedge a$ とする。$a\vee b=[a\vee(a\wedge b)]\vee[b\vee(b\wedge a)]=[a\vee(b\wedge a)]\vee[b\vee(b\wedge a)]=(a\vee b)\vee(b\wedge a)$，$b\vee a=[b\vee(b\wedge a)]\vee[a\vee(a\wedge b)]=[b\vee(b\wedge a)]\vee[a\vee(b\wedge a)]=(b\vee a)\vee(b\wedge a)$. ところが，$a\vee b\approx b\vee a$ だから，(2.1)によつて，$(a\vee b)\vee(b\wedge a)=(b\vee a)\vee(b\wedge a)$ となり，從つて $a\vee b=b\vee a$, 逆に $a\vee b=b\vee a$ とすると，$a\wedge b=[(b\vee a)\wedge a]\wedge b=(b\vee a)\wedge(a\wedge b)$, $b\wedge a=(a\vee b)\wedge(b\wedge a)$. 從つて同樣に $a\wedge b=b\wedge a$.

定義13：$a\sim b \iff a\wedge b=b\wedge a$ によつて，關係$\sim$を T-$S_\vee$-Schiefverband に導入する。

(2.3) T-$S_\vee$-Schiefverband において，關係$\sim$は Kongruentrelation である。

定義14：$\Phi(a)=\{x\in M\mid a\wedge x=x\wedge a\}$ をT-$S_\wedge$-Schiefverband における modulo$\sim$に關する a の同値類と名づけ，二つの同値類 $\Phi(a)$と$\Phi(b)$ に對して次の二種の二項演算を定める。

$$\Phi(a)\,\circledwedge'\,\Phi(b)=\Phi(a\wedge b)$$

$$\Phi(a)\,\circledvee'\,\Phi(b)=\Phi(a\vee b).$$

これによつて同値類の集合M/Φの上に，代數が定義される。これを $M/\Phi_{\circledwedge'\circledvee'}$ で表わし，$M/\Phi_{\circledwedge'\circledvee'}$ に屬する同値類を Φ-Klasse と呼ぼう。

(2.6) T-$S_\vee$-Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ の任意の Φ-Klasse は，$M_{\wedge\vee}$ の可

換な Teil-$S_\vee$-Schiefverband であり，從つて Verband である。

(2.7) $M/\Phi_{\circledwedge}'{}_{\circledvee}'$ は Nest である。

證明 $M_{\wedge\vee}$ の任意の二元 a, b に對して，$a\wedge b\sim a$ かつ $a\vee b\sim b$ であるから，$a\wedge b\sim a$ かつ $b\vee a\sim a$ であり，從つて $a\wedge b\sim b\vee a$. さて

$$\Phi(a)\circledwedge'\Phi(b)=\Phi(a\wedge b)$$

$$\Phi(b)\circledvee'\Phi(a)=\Phi(b\vee a)$$

$$\therefore \Phi(a)\circledwedge'\Phi(b)=\Phi(b)\circledvee'\Phi(a).$$

(2.8) T-$S_\vee$-Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ でΩを一つの Ω-Klasse とし，Φを一つの Φ-Klasse とすると，$e\in\Omega$ かつ $e\in\Phi$ なる丁度一つの元 $e\in M$ が存在する。即ち任意の二元 $a\in\Omega$, $b\in\Phi$ に對して，$\Omega\cap\Phi=\{a\vee(b\wedge a)\}$.

證明 $a\wedge[a\vee(b\wedge a)]=a$, $[a\vee(b\wedge a)]\vee a=(a\vee a)\vee[(b\wedge a)\vee a]=a\vee a=a$. 從つて $a\vee(b\wedge a)\approx a$ だから $a\vee(b\wedge a)\in\Omega$. 一方 $b\wedge[a\vee(b\wedge a)]=[a\vee(b\wedge a)]\wedge b$ が成立つから $a\vee(b\wedge a)\in\Phi$.

さらに $x\approx y$ かつ $x\sim y$ とから $x=y$ が得られるから，$\Omega\cap\Phi$ は只一つしか存在しない。

§ 3

(3.1) T-$S_\vee$-Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ における任意のΦ-KlasseはK-Idealである。

(3.2) 任意の T-$S_\vee$-Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ において，Φ-Klasse は必ず存在する。

(3.3) 任意の T-$S_\vee$-Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ は互に素な K-Ideal (Teil-$S_\vee$-Schiefverband) に分割され得る。そしてそれらはいずれも begleitender Verband に同型で勿論可換である。

證明 (1.12), (1.14), (3.1), と(3.2)から明らかである。

(3.4) $S_\vee$-Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ が K-Ideal に分割出來るならば，$M_{\wedge\vee}$ は T-$S_\vee$-Schiefverband である。

證明　$c\vee(a\vee b)>a\vee b$ かつ $b\vee a>a\vee b$ だから，$[c\vee(a\vee b)]\wedge(b\vee a)>a\vee b$ であり，一方 $[c\vee(a\vee b)]\wedge(b\vee a)<b\vee a$ かつ $b\vee a<a\vee b$ だから，$[c\vee(a\vee b)]\wedge(b\vee a)\approx a\vee b$. 同様に $(a\wedge b)\vee[(b\wedge a)\wedge c]\approx b\wedge a$ である。従つて，$[c\vee(a\vee b)]\wedge(b\vee a)$, $a\vee b$, $(a\wedge b)\vee[(b\wedge a)\wedge c]$, $b\wedge a$ は四つとも同じΩ-Klasse に屬し，一方これら四つとも同じ K-Ideal (bを含むIdeal) に屬す。(1.13)によつてそれらは皆一致しなければならぬ。特に

$$[c\vee(a\vee b)]\wedge(b\vee a)=a\vee b$$
$$(a\wedge b)\vee[(b\wedge a)\wedge c]=b\wedge a$$

が成立つ。

定理　$S_\vee$-Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ が可換な Ideal に分割出來る爲の必要十分條件は，Mの任意の三元に對して$(T^\wedge)$と$(T^\vee)$を滿すことである。

この定理と双對に，$S_\vee$-Schiefverband についても類似の定理が成立つ。

Gerhardts[2] の定理は「G-Schiefverband $M_{\wedge\vee}$が可換な Ideal に分割出來る爲の必要十分條件は，Mの任意の三元に對して$(T^\wedge)$と$(T^\vee)$とが滿足することである」であつた。$S_\wedge$-Schiefverband と $S_\wedge$-Schiefverband については，まつたく同様の結果を得た。しかし結合律の置き換えを片方にとどめないで，兩方共置換えてしまうと，同様に準順序を導入しても推移律が成立たなくなるようである。從つてこの第四番目のもの，擬似 Schiefverband は今述べて來た三つのSchiefverbandとは大分異つた性質を持つようである。

文　　献

1) M. D. Gerhardts; Zur Charakterisierung distributiver Schiefverbände. Math. Ann., 161, 231—240(1965)

2) ——————; Über die Zerlegbarkeit von nichtkommutativen Verbänden in kommutative Telverbäden. Proc. Japan Acad., 41, 883-888(1965)

3) ——————; Ein unsymmetrisches Kommutativgesetz in der Verbandsthoerie. Math. Nachr., 35, No.5-6, 305-310(1967).

4) M. J. Ruedin; Distributivité et axiomatique des treillis. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265(1967).

5) W. Felscher; Ein unsymmetrisches Assoziativ-Gesetz in der Verband-

theorie. Arch. Math., 8, 171-174(1957).
6) 芝原　茂; Lattice Theory における Felscherの「非對稱な結合律」について。佛教大學研究紀要, 53(1969)。
7) P. Jordan, and E. Witt; Zur Theorie der Schrägverbände. Akad. Mainz 225-232(1953)